

压缩机系统高阶 Moore-Greitzer 模型的 动态行为分析

张春梅, 张超, 徐自力, 王尚锦

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 以压缩机系统不稳定现象的 MG(Moore-Greitzer)模型为基础提出了其高阶 Galerkin 扩展形式,并进行了稳定性分析,得到旋转失速和喘振的条件:失速仅受阀门参数的影响,而喘振受阀门参数、稳定性参数两者的综合影响.然后,在压缩机性能曲线为三次曲线的典型条件下,从稳定状态到喘振状态分阶段对系统的动态行为进行数值仿真.结果表明:高阶速度扰动模态波在失速初始阶段严重影响一阶模态波,而在过失速阶段则影响不大;在相同的初始条件下,高阶扩展模型失速发展的速度比一阶模型快了约 16%,因此可以更早地检测到失速的发生;高阶模型对初始扰动更加敏感.

关键词: 旋转失速;喘振;高阶模型;数值仿真

中图分类号: TH452 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)01-0041-05

Dynamics and Analysis of Higher Order Moore-Greitzer Model in Compression System

Zhang Chunmei, Zhang Chao, Xu Zili, Wang Shangjin

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The higher order Galerkin expansion of the Moore-Greitzer model of instabilities in compression systems was proposed. The identification of stability was conducted based on this model. The conditions of emergence of rotating stall and surge were concluded qualitatively. Stall only depends on the throttle parameter, but surge depends on both of throttle parameter and stability parameter. Then dynamic behavior was piecewise investigated from axisymmetric steady flow to surge with a cubic compressor characteristic. Simulation results show that the higher-order disturbance velocity potential harmonics strongly interact with the first harmonic during stall inception. Forming stall behavior from axisymmetric steady flow in higher-order model is faster by about sixteen percent than in first order model. Thus the occurrence of unstable phenomena at the onset is earlier. Initial disturbance is more sensitive to the higher order model.

Keywords: rotating stall; surge; higher order model; numerical simulation

喘振和旋转失速是发生在压缩系统中的 2 种不稳定工作现象.喘振是强烈的轴向低频大幅度振荡,对压缩系统的正常工作有很大危害,旋转失速为二维不稳定现象,使系统的性能迅速下降.

文献[1]首先从系统动力学的角度提出了一维非线性喘振模型,其主要贡献是:以稳定性参数 B

作为压缩机是否进入喘振的判据;当 $B < B_{crit}$ 时,不稳定现象表现为失速;当 $B > B_{crit}$ 时,压缩机进入喘振状态.以旋转模态波是失速形成的原因为理论基础,文献[2]在一维模型基础上提出了失速与喘振耦合的非线性模型,对模型中的偏微分方程应用 Galerkin 变换,取傅里叶级数第一级,得到一阶模态

波(MG3)模型,这一模型能够描述失速和喘振对性能的主要非线性影响.因此,MG3 模型成为旋转失速主动控制的主要理论依据.但是,MG3 模型不能精确地描述失速状态下模态波的转变,忽略了一阶模态波与高阶模态波之间的耦合关系.根据文献[2]的实验结果可明显发现速度势扰动与采用一阶 Galekin 截断的正弦曲线相差较大.因此,有必要研究其高阶扩展形式.文献[3]通过数值模拟发现:随着模型阶数的增加,滞后现象更加严重.文献[4]发现当模型包含高阶模态波时,以一阶模态波模型为基础的控制效果不佳.另外,文献[5]从动力系统的角度分析了参数 B 对不稳定现象的影响.

本文对 MG3 模型进行了高阶扩展,得到其高阶模型,分析了参数 B 和阀门参数对不稳定现象的影响,最后对典型的动态行为进行了数值仿真.

1 高阶模型的推导

1.1 基本模型

基本 MG 模型的压缩系统及假设条件如图 1 所示,该模型方程为^[2]

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \Psi_c(\Phi + \tilde{\phi}'_\eta|_{\eta=0}) - m\tilde{\phi}'_\xi|_{\eta=0} - \frac{1}{2a}(2\tilde{\phi}'_{\eta\eta} + \tilde{\phi}'_{\xi\theta})|_{\eta=0} \quad (1)$$

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + \tilde{\phi}'_\eta|_{\eta=0}) d\theta \quad (2)$$

$$l_c \frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{4B^2}(\Phi - \Phi_T) \quad (3)$$

式中: $\tilde{\phi}'$ 为压缩机上游的扰动速度; Φ 为周向的平均速度系数; Ψ 为压升系数; ξ 为量纲一的时间; φ_c 为压缩机的性能函数; B 为 Gretizer 稳定性参数; a 为压缩机内部滞后常数; m 为压缩系统参数; θ 为量纲一的圆周坐标; η 为量纲一的轴向长度; Φ_T 为节流阀的特性函数; l_c 为压缩机等效长度.假设压缩机性能曲线为以下三次多项式

$$\varphi_c(\Phi) = \varphi_{c0} + H \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{\Phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \quad (4)$$

式中:参数 φ_{c0} 、 H 、 W 为压缩机的特征参数,可由实验测得的准稳态数据得到.在亚音速条件下,阀门特性曲线为以下抛物线

$$\Phi_T(\Psi) = \gamma(\Psi)^{1/2} \quad (5)$$

式中: γ 为阀门参数,正比于阀门开度.

1.2 高阶模型

因为 $\tilde{\phi}'$ 满足 Laplace 方程,对于每一个轴向长

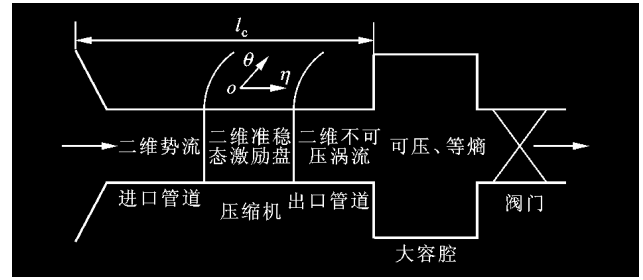


图1 文献[2]的集总参数模型及系统简图

度 η ($\eta \leq 0$), $\theta \in [0, 2\pi]$, 利用傅里叶级数, 得到

$$\tilde{\phi}'(\xi, \eta, \theta) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{k\eta} [a_k(\xi) \sin(k\theta) + b_k(\xi) \cos(k\theta)] \quad (6)$$

文献[2]仅取 $k=1$ 得到 MG3 模型, 这里我们要保留 N 项, 得到其高阶模型.

令 $g(\xi, \theta) = \tilde{\phi}'_\eta|_{\eta=0}$, 并有

$$g_N = \sum_{k=1}^N [a_k(\xi) \sin(k\theta) + b_k(\xi) \cos(k\theta)] \quad (7)$$

将式(7)代入式(1)得到

$$\dot{a}_k = \frac{k}{k+ma} \left[\frac{1}{2} k b_k + \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + g_N) \sin(k\theta) d\theta \right] \quad (8)$$

$$\dot{b}_k = \frac{k}{k+ma} \cdot$$

$$\left[-\frac{1}{2} k a_k + \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + g_N) \cos(k\theta) d\theta \right] \quad (9)$$

令

$$x^{2N} = [a_1, b_1, \dots, a_N, b_N]$$

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N)$$

$$f_k^{\sin}(x^N, \Phi) = \frac{ka}{\pi(k+ma)} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + g_N) \sin(k\theta) d\theta$$

$$f_k^{\cos}(x^N, \Phi) = \frac{ka}{\pi(k+ma)} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + g_N) \cos(k\theta) d\theta$$

$$\mathbf{f} = [f_1^{\sin}, f_1^{\cos}, \dots, f_N^{\sin}, f_N^{\cos}]$$

$$\text{其中 } \mathbf{A}_k = \frac{k}{k+ma} \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

于是得到 $2N+2$ 阶模型为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^{2N}}{d\xi} &= \mathbf{A}x^{2N} + \mathbf{f}(x^{2N}, \Phi) \\ \frac{d\Phi}{d\xi} &= \frac{1}{l_c} \left(-\Psi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_c(\Phi + g_N) d\theta \right) \\ \frac{d\Psi}{d\xi} &= \frac{1}{4l_c B^2} (\Phi - \Phi_T) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2 稳定性分析

系统平衡点为阀门性能曲线与压缩机性能曲线的交点. 当平衡点 $(x_e^{2N}, \phi_e, \varphi_e)$ 处于性能曲线最高点右侧时, 对于小扰动情况, 对系统进行线性化分析得到其雅克比矩阵^[6]

$$\mathbf{F}(x_e^{2N}, \phi_e, \varphi_e) = \text{diag}(\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_N, \tilde{\mathbf{B}}) \quad (11)$$

$$\text{式中: } \tilde{\mathbf{A}}_k = \frac{a}{k + ma} \begin{bmatrix} a\varphi'(\phi_e) & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & a\varphi'(\phi_e) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\varphi'_c(\phi_e)}{l_c} & -\frac{1}{l_c} \\ \frac{1}{4l_c B^2} & -\frac{\gamma}{8l_c B^2 (\varphi_e)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

$\tilde{\mathbf{A}}_k$ 的特征根为

$$\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_k) = \frac{k}{k + ma} (a\varphi'(\phi_e) \pm \frac{k}{2}i) \quad (12)$$

$\tilde{\mathbf{B}}$ 的特征方程为

$$(\lambda(\tilde{\mathbf{B}}))^2 + \frac{1}{l_c} \left(\frac{\gamma}{8B^2 (\varphi_e)^{1/2}} - \varphi'_c(\phi_e) \right) \lambda(\tilde{\mathbf{B}}) + \frac{1}{4l_c^2 B^2} \left(1 - \frac{\gamma \varphi'_c(\phi_e)}{2(\varphi_e)^{1/2}} \right) = 0 \quad (13)$$

假设 $\gamma = \gamma_0$ 时, 平衡点在性能曲线最高点. 当 $\gamma > \gamma_0$ 时, 平衡点在性能曲线最高点右侧, 有 $\varphi'_c(\phi_e) < 0$, 于是得到 $\text{Re}[\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_k)] < 0, \text{Re}[\lambda(\tilde{\mathbf{B}})] < 0$, 系统渐近稳定, 如图 2 所示; 当 $\gamma < \gamma_0$ 时, 平衡点在性能曲线最高点左侧, 有 $\varphi'_c(\phi_e) > 0$, 于是得到 $\text{Re}[\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_k)] > 0$, 系统此时不稳定, 旋转失速发生, 如图 3、图 4 所示. 继续减小阀门开度, 假设当阀门参数 $\gamma = \gamma_i$ 时, 雅克比矩阵特征值穿越虚轴, 此时发生喘振现象, 如图 5 所示. 由上可知, 失速的发生仅与平衡点处的压缩机性能曲线斜率 φ'_c 有关, 即当 $\gamma < \gamma_0$ 时, 失速现象发生, 而与参数 B 的大小无关. 当参数 B 很小时, 由于阀门参数 γ 的限制, 将不会发生喘振. 当参数 B 较大、阀门参数 $\gamma < \gamma_i$ 同时满足时, 喘振现象才会发生. 这与文献[1]得出的结论一致.

3 数值仿真及分析

压缩机性能曲线为三次多项式形式, 阀门性能曲线为抛物线形式^[2], 如无特殊说明, 参数及初始状态取值分别见表 1、表 2. 以下分析中取 $N=2$, 即为 MG6 模型, 其中 ξ 为量纲一的时间, 模态波幅值 $J_i = (a_i^2 + b_i^2)/4W^2, i=1, 2$.

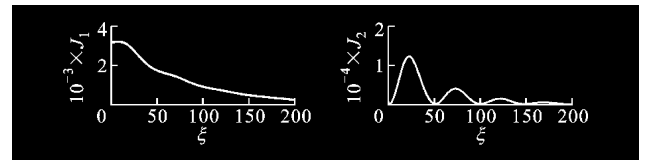
在图 2 中, 经过一段时间, 压升、流量稳定在某一状态, 模态波幅值很小直至为 0, 此时为稳定状态. 在图 6 中, 仅改变初始速度势扰动, 此时系统处于失速状态. 由图 6 可知, 当初始扰动比较大时, 即使阀门参数 $\gamma > \gamma_0$, 系统也会发生旋转失速, 因此存在另外一个临界阀门开度 γ_s . 当 $\gamma_0 < \gamma < \gamma_s$ 时, 对于有限幅度扰动系统将发生旋转失速, 当 $\gamma > \gamma_s$ 时, 不会发生旋转失速. 在图 3 中, ξ 约为 50~100 时, 模态波幅值急剧增加, 压升和流量在这一阶段迅速下降, 最后稳定在某一固定状态, 为稳定的旋转失速. 在图 4 中, MG3 模型也处于失速状态, 但是其失速发展速度较慢. 以 $J_1=0.3$ 为阈值, 可得其时间历程分别为 $\xi \approx 80$ (MG3 模型) 和 $\xi \approx 67$ (MG6 模型). 由以上分析可知, MG6 模型能够更早地检测到失速现象的发生, 比 MG3 模型提前了大约 16%. 在图 5

表 1 模型参数数值

参数	a	m	H	W	φ_0
数值	0.286	1.75	0.18	0.25	0.30

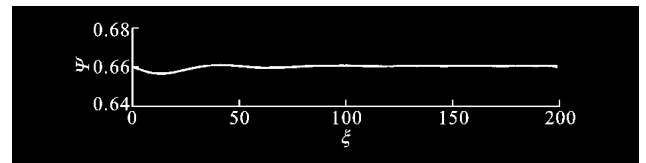
表 2 数值仿真初始状态数值

参数	a_{01}	b_{01}	a_{02}	b_{02}	Φ_0	Ψ
数值	0.02	0.02	0	0	0.50	0.66

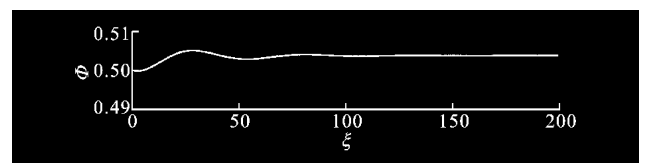


(a) 一阶模态波幅值
随时间的变化

(b) 二阶模态波幅值
随时间的变化

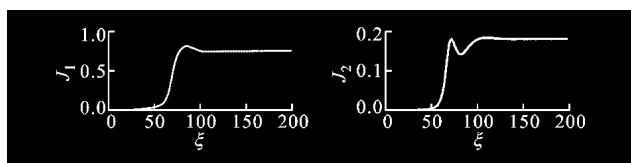


(c) 压升随时间的变化

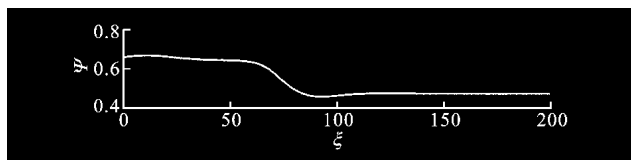


(d) 流量随时间的变化

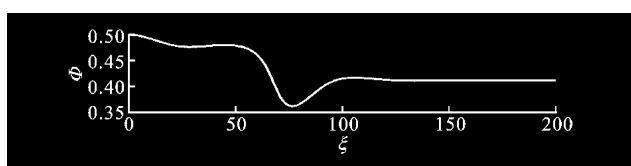
图 2 $B=0.5, \gamma=0.62, a_{10}, b_{10}$ 分别为 0.02 时
MG6 模型系统状态变量



(a)一阶模态波幅值随时间的变化 (b)二阶模态波幅值随时间的变化

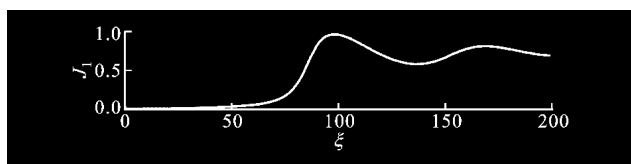


(c)压升随时间的变化

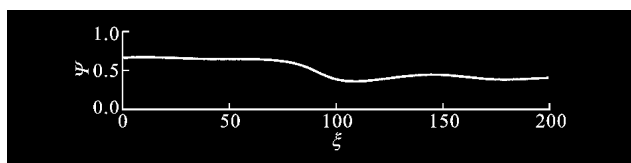


(d)流量随时间的变化

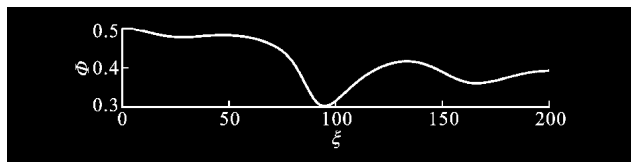
图3 $B=0.5, \gamma=0.60$ 时 MG6 模型系统状态变量



(a)一阶模态波幅值随时间的变化



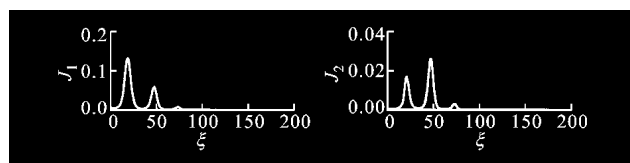
(b)压升随时间的变化



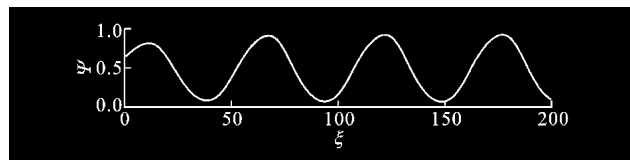
(c)流量随时间的变化

图4 $B=0.5, \gamma=0.60$ 时 MG3 模型系统状态变量

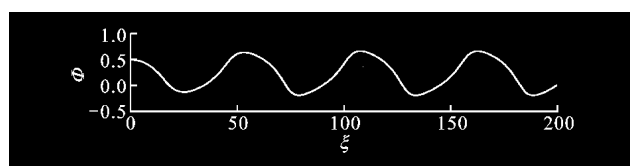
中,模态波幅值最终为0,压升、流量随时间振荡,系统表现为喘振。在图7中,仅改变参数 B 的大小,系统即处于失速状态,可知喘振的发生不仅与阀门参数 γ 有关,还与参数 B 有关。在相同初始扰动条件、相同参数条件下(见图6、图8),MG3模型表现为稳定状态,而MG6模型表现为旋转失速,可知MG6在失速初始阶段对初始状态较为敏感。



(a)一阶模态波幅值随时间的变化 (b)二阶模态波幅值随时间的变化

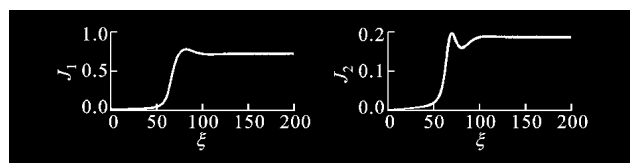


(c)压升随时间的变化

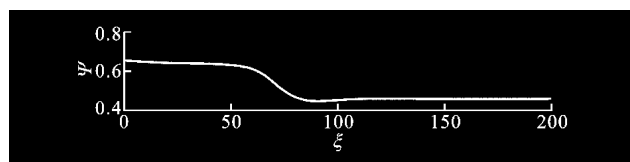


(d)流量随时间的变化

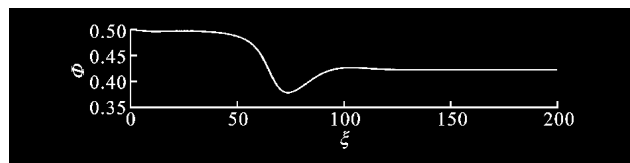
图5 $B=0.5, \gamma=0.36$ 时 MG6 模型系统状态变量



(a)一阶模态波幅值随时间的变化 (b)二阶模态波幅值随时间的变化



(c)压升随时间的变化

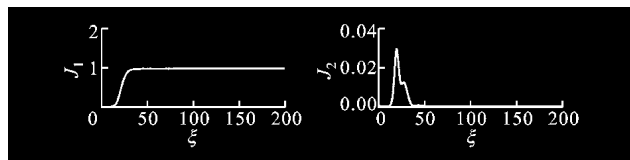
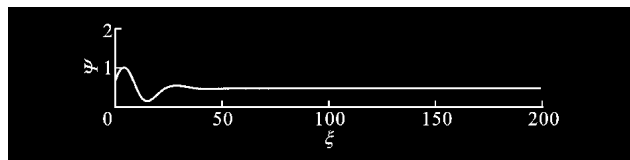


(d)流量随时间的变化

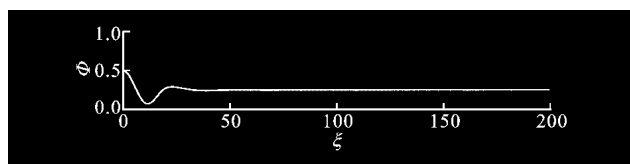
图6 $B=0.5, \gamma=0.62, a_{10}, b_{10}$ 分别为0.04 时 MG6 模型系统状态变量

4 结 论

本文首先对 Moore-Greitzer 模型的高阶形式进行了推导,然后对压缩系统的动态行为进行了非线性理论分析,发现失速现象的产生不仅与阀门参数有关,还与初始扰动大小有关;喘振现象的产生由

(a)一阶模态波幅值
随时间的变化(b)二阶模态波幅值
随时间的变化

(c)压升随时间的变化



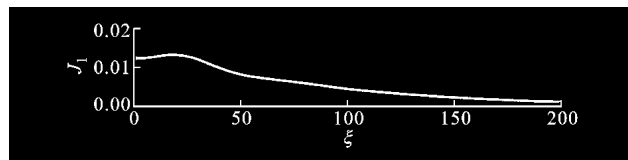
(d)流量随时间的变化

图7 $B=0.2, \gamma=0.36$ 时 MG6 模型系统状态变量

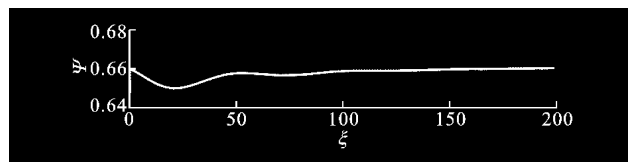
参数 B 、阀门参数 γ 共同决定,定性分析了不稳定现象初始点的阀门参数,并在不同的参数条件下对高阶模型进行了数值模拟,与 MG3 模型进行对比,在失速初始阶段,高阶模态波对一阶模态波影响较大,失速发展速度较快,对初始扰动更加敏感.本文不但为非线性 MG 模型的定量分析提供了理论基础,并且对主动失速的检测及其控制系统的设计有指导性意义.

参考文献:

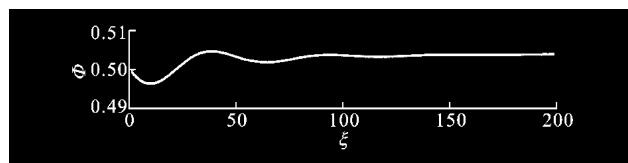
- [1] Greitzer E M. Surge and rotating stall in axial flow compressors: parts I, II [J]. ASME Journal of Engineering for Power, 1976, 98(2):190-217.
- [2] Moore F K, Greitzer E M. A theory of post-stall transients in axial compression systems: part I [J]. ASME Engineering for Gas Turbines and Power, 1986, 108



(a)一阶模态波幅值随时间的变化



(b)压升随时间的变化



(c)流量随时间的变化

图8 $B=0.5, \gamma=0.62, a_{10}=0.04, b_{10}=0.04$ 时 MG3 模型系统状态变量

(1):68-76.

- [3] Henderson E, Sparks A. On the suitability of bifurcation stabilization control laws for high order Moore-Greitzer compressor models [C]// Proceedings of American Control Conference. Piscataway, USA: IEEE, 1997.
- [4] Humbert J S, Krener A J. Dynamics and control of entrained solutions in multi-mode Moore-Greitzer compressor models [J]. International Journal of Control, 1998, 71(5):807-821.
- [5] McCaughan F E. Bifurcation analysis of axial flow compressor stability [J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1990, 50(5):1232-1253.
- [6] 曹建福,韩崇昭,方洋旺. 非线性系统理论及应用 [M]. 西安:西安交通大学出版社,2001.

(编辑 王焕雪)